ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

Maciej Burnecki

najbardziej podstawowe zadania z odpowiedziami

listy pełne

Spis treści

1 Wyrażenia algebraiczne, dwumian Newtona

1. Uprość wyrażenie

   (a) $\dfrac{a-b}{a^2-2ab+b^2}\left(\dfrac{a}{b}-1\right)$, (b) $\dfrac{b-a}{a^2-b^2}\left(\dfrac{b}{a}+1\right)$,

   (c) $\dfrac{a^4+a^3b+a^2b^2}{a^3-b^3}\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1\right)$, (d) $\dfrac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)}{a^6-b^6+ab^5-ba^5}$.

2. W rozwinięciu dwumianowym wyrażenia $f(x)$ wyznacz współczynnik przy α, jeśli

   (a) $f(x)=(x+\sin x)^7, \alpha=x^4\sin^3 x$, (b) $f(x)=(1-e^x)^{10}, \alpha=e^{3x}$,

   (c) $f(x)=\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right)^9, \alpha=x^{24}$, (d) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{x}\right)^{99}, \alpha=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^{98}}$.

3. Zapisz w prostszej postaci liczbę

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}3^k\right]$, (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}(-2)^k\right]$.

2 Liczby zespolone

1. Zapisz w postaci algebraicznej oraz zaznacz na płaszczyźnie liczbę zespoloną

   (a) $z = \dfrac{1+i}{2-i}$, (b) $z = \dfrac{2+3i}{4+5i}$, (c) $z = \dfrac{5}{|4-3i|\, i}$, (d) $z = \dfrac{\overline{i-2}}{i+|i-\sqrt{3}|}$.

2. Zapisz w postaci algebraicznej liczbę zespoloną

   (a) $z = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{20}$, (b) $z = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{40}$, (c) $z = (-1+i)^{81}$, (d) $z = (-\sqrt{3}-i)^{123}$.

3. Zapisz w postaci algebraicznej wszystkie pierwiastki trzeciego stopnia z liczby
   (a) $z = -1$, (b) $z = i$, (c) $z = -2+2i$, (d) $z = 1+i$.

4. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równanie
   (a) $z^2 - 2z + 4 = 0$, (b) $z^2 + 8z + 25 = 0$, (c) $z^2 + 10z + 34 = 0$.

3 Wielomiany i funkcje wymierne

1. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $Q(x)$, jeśli
   (a) $P(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 + x + 7, Q(x) = x^3 + x + 1$, (b) $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1, Q(x) = x^2 + x + 3$.

2. Rozłóż wielomian $W(x)$ na nierozkładalne czynniki rzeczywiste, jeśli
   (a) $W(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$, (b) $W(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$.

3. Rozłóż funkcję wymierną właściwą $f(x)$ na sumę rzeczywistych ułamków prostych, jeśli

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3+2x^2+5x+4}$, (b) $f(x) = \dfrac{-x+2}{x^3+3x^2+4x+4}$.

4 Macierze i wyznaczniki

1. Rozwiąż równanie macierzowe

   (a) $2X - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot X^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Oblicz wyznacznik

   (a) $W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$, (b) $W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, (c) $W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, (d) $W = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy A, jeśli

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Wyznacz rząd $r(A)$ macierzy A, jeśli

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 10 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 12 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

5 Układy równań liniowych

1. Rozwiąż układ równań

(a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y-z=2, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y+z-t=4 \\ x+y-z+t=-4 \\ x-y+z+t=2 \\ -x+y+z+t=-2, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} -x-y+z+t=4 \\ x-y-z+t=0 \\ x-y-z-t=-8, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+y+z+t=6 \\ x+2y+z+t=8 \\ x+y+2z+t=9 \\ 4x+5y+6z+4t=0. \end{cases}$

2. W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, rozwiąż układ równań

(a) $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 2x-ay=8, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (a+6)x+y+2z=4 \\ x+(a+5)y+2z=4 \\ x+2z=4. \end{cases}$

3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których poniższy układ równań ma przynajmniej jedno rozwiązanie:

(a) $\begin{cases} 2x+3y=a^2 \\ -8x-12y=-36, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y+4z=a \\ 4x-2y-2z=5 \\ 7x+y+10z=8. \end{cases}$

4. W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, określ liczbę rozwiązań układu

(a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 7x+ay=a, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=-a-1. \end{cases}$

6 Wartości i wektory własne macierzy

1. Dla macierzy $A \in M_2(\mathbb{C})$, wyznacz wartości własne $\lambda \in \mathbb{C}$ i odpowiadające im przykłady wektorów własnych $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$, jeśli

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -17 & -3 \end{pmatrix}$.

7 Geometria analityczna w przestrzeni

1. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których
   (a) równoległościan o trzech kolejnych wierzchołkach podstawy $A = (-5, 2, 1), B = (2, 1, 2), C = (3, a^2, 3)$ i wierzchołku $E = (-a-5, 4, -18)$ nad A, jest prostopadłościanem,
   (b) kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{u} = (a, -16, 4)$ oraz $\mathbf{v} = (2a, 1, -4)$ jest prosty,
   (c) wektory $\mathbf{u} = \left(1, a^2, 1\right)$ oraz $\mathbf{v} = (3, 12, 3)$ są równoległe.
2. Wyznacz pole P
   (a) równoległoboku o kolejnych wierzchołkach $A = (2, 2, 4), B = (0, -2, -2), C = (2, 1, 2)$,
   (b) równoległoboku o środku w punkcie $O = (2, 1, 2)$ i końcach jednego z boków $A = (2, 2, 4), B = (0, -2, -2)$,
   (c) trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, -2, -4), B = (0, 2, 2), C = (-2, -1, -2)$.
3. Wyznacz objętość V
   (a) czworościanu o wierzchołkach $A = (1, 1, 1), B = (2, 2, 2), C = (1, -2, -2)$ i $D = (-1, 1, -1)$,
   (b) równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ oraz $\mathbf{w} = (-1, -1, 3) \times (1, 2, 3)$.
4. Podaj
   (a) równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A = (-1, 1, 1), B = (0, 1, 2), C = (3, 0, 5)$,

(b) równanie ogólne płaszczyzny o równaniu parametrycznym $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 + t - s \\ z = 1 + t + s, \end{cases}$

(c) równanie parametryczne prostej o równaniu krawędziowym $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0, \end{cases}$

(d) równanie parametryczne prostej prostopadłej do prostych $m : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 + t, \end{cases}$ $l : \begin{cases} x = -s \\ y = 2 + s \\ z = 1 - s, \end{cases}$

w punkcie ich przecięcia.

5. Wyznacz odległość $d(P, \pi)$ punktu P od płaszczyzny π, jeśli

(a) $P = (-2, 1, 3), \pi : x + 2y + 2z - 3 = 0,$ (b) $P = (1, 2, 1), \pi : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 + s \\ z = -1 - t + s. \end{cases}$

6. Wyznacz odległość $d(P, l)$ punktu P od prostej l, jeśli

(a) $P = (2, 3, 4), l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t, \end{cases}$ (b) $P = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), l : \begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0. \end{cases}$

7. Wyznacz rzut prostopadły P' punktu $P = (2, 2, 1)$ na

(a) prostą $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 2t, \end{cases}$ (b) prostą $l : \begin{cases} x - 2y - 3z + 1 = 0 \\ x - y + z = 0, \end{cases}$

(c) płaszczyznę $\pi : x + 2y - 3z + 4 = 0,$ (d) płaszczyznę $\pi : \begin{cases} x = 1 + 2t - s \\ y = -11 + t + s \\ z = t, \end{cases}$

a następnie odbicia symetryczne P'' punktu P względem powyższych prostych i płaszczyzn.

8. Wyznacz kąt φ pomiędzy

(a) prostymi $l : \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ z = t \end{cases}$ oraz $m : \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ z = 1 - s. \end{cases}$

(b) płaszczyznami $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = t - s \\ z = t + s \end{cases}$ oraz $\pi_2 : y - z - 1 = 0,$

(c) prostą $l : \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$ i płaszczyzną $\pi : x + y + 5 = 0.$

8 Odpowiedzi, wskazówki

Wyrażenia algebraiczne, dwumian Newtona

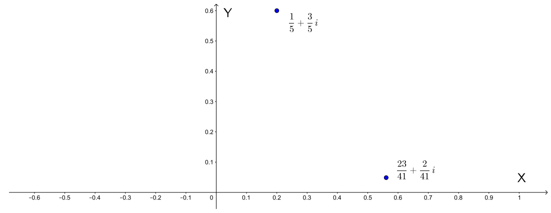
1. (a) $\frac{1}{b}$, (b) $-\frac{1}{a}$, (c) $-a - b$, (d) 1.

2. (a) $a_4 = \binom{7}{3} = 35$, (b) $a_3 = -\binom{10}{3} = -120$, (c) $a_2 = \binom{9}{2} = 36$, (d) $a_1 = \binom{99}{1} = 99$.

3. (a) 4^n, (b) $(-1)^n$.

Liczby zespolone

1. (a) $z = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$, (b) $z = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$.



(c) $z = -i$, (d) $z = -1$.

2. (a) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, (b) $z = 1$, (c) $z = -2^{40} + 2^{40}i$, (d) $-2^{123}\ i$.

3. (a) $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, w_1 = -1, w_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, (b) $w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, w_2 = -i$,

(c) $w_0 = 1 + i, w_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i, w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$,

(d) $w_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[3]{2}}i, w_1 = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i, w_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}i$.

Wskazówka: $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

4. (a) $z \in \left\{1 + \sqrt{3}\ i, 1 - \sqrt{3}\ i\right\}$, (b) $z \in \{-4 + 3\ i, -4 - 3\ i\}$, (c) $z \in \{-5 + 3\ i, -5 - 3\ i\}$.

Wielomiany i funkcje wymierne

1. (a) $I(x) = x^2 - x + 2, R(x) = 5$, (b) $I(x) = x^2 + x - 3, R(x) = x + 10$.

2. (a) $W(x) = (x+2)(x-2)\left(x^2 + x + 1\right)$, (b) $W(x) = (x-1)(x+2)(x^2 + x + 1)$.

3. (a) $f(x) = \frac{-1}{x^2 + x + 4} + \frac{1}{x+1}$, (b) $f(x) = \frac{-x}{x^2 + x + 2} + \frac{1}{x+2}$.

Macierze i wyznaczniki

1. (a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. (a) $W = -1$, (b) $W = 2$, (c) $W = 1$, (d) $W = -5$.

3. (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. (a) $r(A) = 2$, (b) $r(A) = 2$, (c) $r(A) = 3$, (d) $r(A) = 3$.

Układy równań liniowych

1. (a) $x = 1, y = 0, z = -1,$ (b) $x = 1, y = -1, z = 2, t = -2.$ (c) $y = 2, t = 4, x = z + 2, z \in \mathbb{R}$ – dowolne, (d) układ sprzeczny (brak rozwiązań).

2. (a) Dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ układ ma tylko jedno rozwiązanie $x = 4, y = 0$, a dla $a = -3$ nieskończenie wiele rozwiązań postaci $\begin{cases} x = 4 - \frac{3}{2}y \\ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$

   (b) dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ układ ma tylko jedno rozwiązanie $x = y = 0, z = 2$, a dla $a = -5$ nieskończenie wiele rozwiązań postaci $\begin{cases} x = 4 - 2z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$

3. (a) $a = -3$ lub $a = 3$, (b) $a = 1$.

4. (a) Dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{14\}$ układ ma tylko jedno rozwiązanie, dla $a = 14$ jest sprzeczny (nie ma rozwiązań),

   (b) dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ układ ma tylko jedno rozwiązanie, dla $a = -2$ nieskończenie wiele rozwiązań, a dla $a = 1$ jest sprzeczny (nie ma rozwiązań).

Wektory i wartości własne macierzy

1. (a) Wartości własnej $\lambda_1 = 1$ odpowiadają wektory własne postaci $\mathbf{u} = (\alpha, -\alpha)$, na przykład $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$, wartości własnej $\lambda_1 = 6$ odpowiadają wektory własne postaci $\mathbf{v} = (\alpha, 4\alpha)$, na przykład $\mathbf{v}_1 = (1, 4)$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

   (b) wartości własnej $\lambda_1 = 4$ odpowiadają wektory własne postaci $\mathbf{u} = (\alpha, \alpha)$, na przykład $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, wartości własnej $\lambda_1 = -1$ odpowiadają wektory własne postaci $\mathbf{v} = (3\alpha, -2\alpha)$, na przykład $\mathbf{v}_1 = (3, -2)$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

   (c) wartości własnej $\lambda_1 = i$ odpowiadają wektory własne postaci $\mathbf{u} = (\alpha, (1 - i)\alpha)$, na przykład $\mathbf{u}_1 = (1, 1 - i)$, wartości własnej $\lambda_2 = -i$ odpowiadają wektory własne postaci $\mathbf{v} = (\alpha, (1 + i)\alpha)$, na przykład $\mathbf{v}_1 = (1, 1 + i)$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

   (d) wartości własnej $\lambda_1 = 2 + 3i$ odpowiadają wektory własne postaci $\mathbf{u} = (2\alpha, (-5 + 3i)\alpha)$, na przykład $\mathbf{u}_1 = (2, -5 + 3i)$, wartości własnej $\lambda_2 = 2 - 3i$ odpowiadają wektory własne postaci $\mathbf{v} = (2\alpha, (-5 - 3i)\alpha)$, na przykład $\mathbf{v}_1 = (2, -5 - 3i)$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

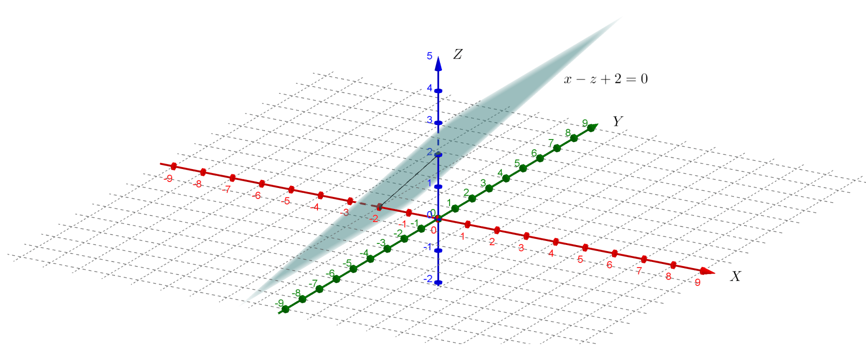
Geometria analityczna w przestrzeni

1. (a) $a = -3$, (b) $a = 4$ lub $a = -4$, (c) $a = 2$ lub $a = -2$.

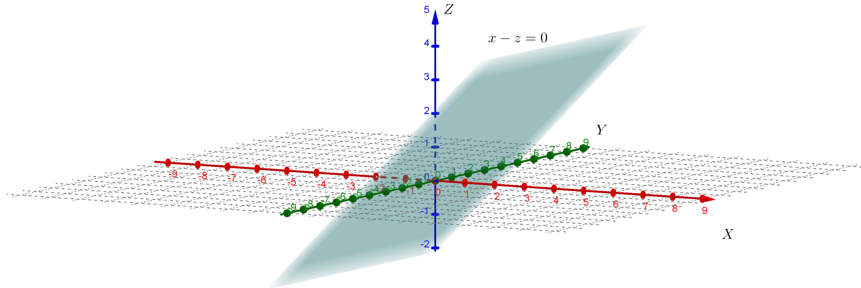
2. (a) $P = 2\sqrt{6}$, (b) $P = 4\sqrt{6}$, (c) $P = \sqrt{6}$.

3. (a) $V = 1$, (b) $V = 15$.

4. (a) $x - z + 2 = 0$,



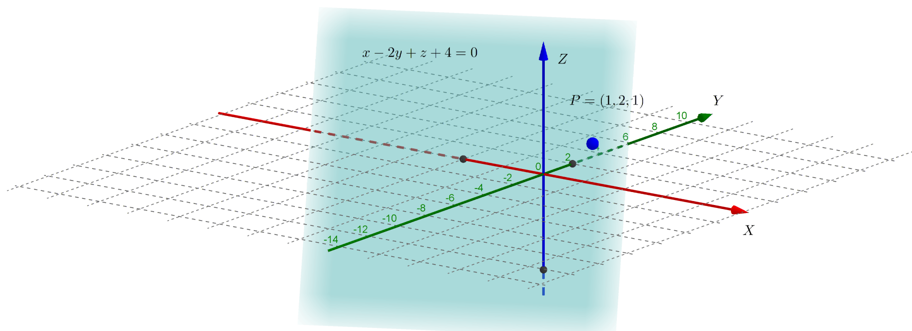
(b) $x - z = 0$,



(c) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t, \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - t. \end{cases}$

5. (a) $d(P, \pi) = 1$,

   (b) równanie ogólne płaszczyzny: $x - 2y + z + 4 = 0$, odległość $d(P, \pi) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.



6. (a) $d(P, l) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, (b) $d(P, l) = \sqrt{3}$.

7. (a) $P' = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right), P'' = \left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, (b) $P' = \left(\frac{41}{21}, \frac{37}{21}, -\frac{4}{21}\right)$,
   (c) $P' = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right), P'' = (1, 0, 4)$, (d) $P' = (1, 1, 4), P'' = (0, 0, 7)$.

8. (a) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, (b) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, (c) $\varphi = \frac{\pi}{6}$.